ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES
de segundo orden con coeficientes variables

Son de la forma:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

EJEMPLOS:

Ecuación hipergeométrica de Gauss

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta\, y = 0$$

Ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + x\,y' + (x^2 - n^2)\,y = 0$$

Ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2x\,y' + n(n+1)\,y = 0$$

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

Resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante series de potencias

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

Uso de las SERIES DE POTENCIAS para resolver estas ecuaciones diferenciales

Muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse de manera explícita, en términos de combinaciones finitas de funciones familiares simples.

$$y'' - 2xy' + y = 0$$ ⇒ Modelo aproximado de la ecuación de Schrodinger de la mecánica cuántica

Se utiliza **el método de la serie de potencias**; es decir, se busca una solución de la forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \ldots$$

Algunas representaciones de funciones elementales en SERIES DE POTENCIAS

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \ldots$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \ldots$$

Serie de Taylor alrededor de x=a de la función f

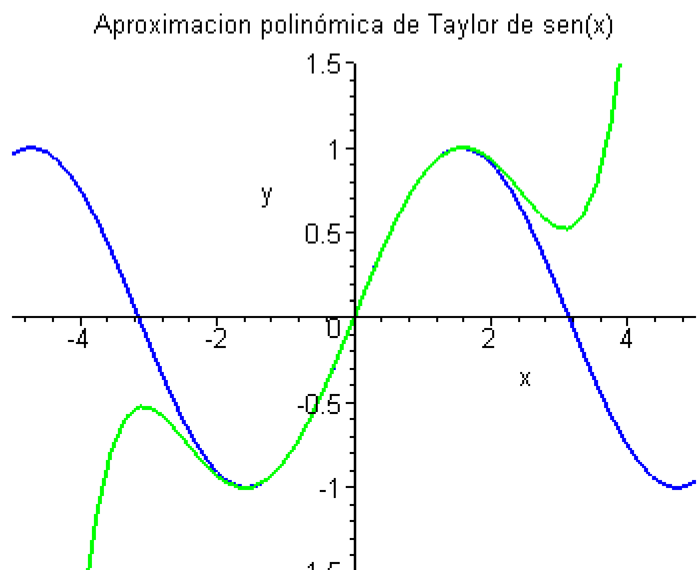
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^{2} + \ldots$$

Representación con MAPLE de la función seno y del polinomio de aproximación obtenido por SERIES DE POTENCIAS

```
> s3:= series(sin(x),x=0,6);
```

$$s3 := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

```
> restart:
> with(plots):
> g1:=plot(sin(x),x=-5..5,y=-1.5..1.5,color=blue,thickness=2):
> g2:=plot(1*x-1/6*x^3+1/120*x^5,x=-5..5,y=-1.5..1.5,color=green,thickness=2):
> display({g1,g2},title=`Seno y su aproximación polinómica`);
```



MÉTODO DE LAS SERIES DE POTENCIAS

Para resolver una ecuación diferencial

Consiste en sustituir:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$$

en la ecuación diferencial y luego determinar cuáles deben ser los coeficientes para que la serie verifique dicha ecuación diferencial.

se obtiene una representación en serie de potencias de una solución

MÉTODO DE LAS SERIES DE POTENCIAS

Para resolver $y'' + y = 0$

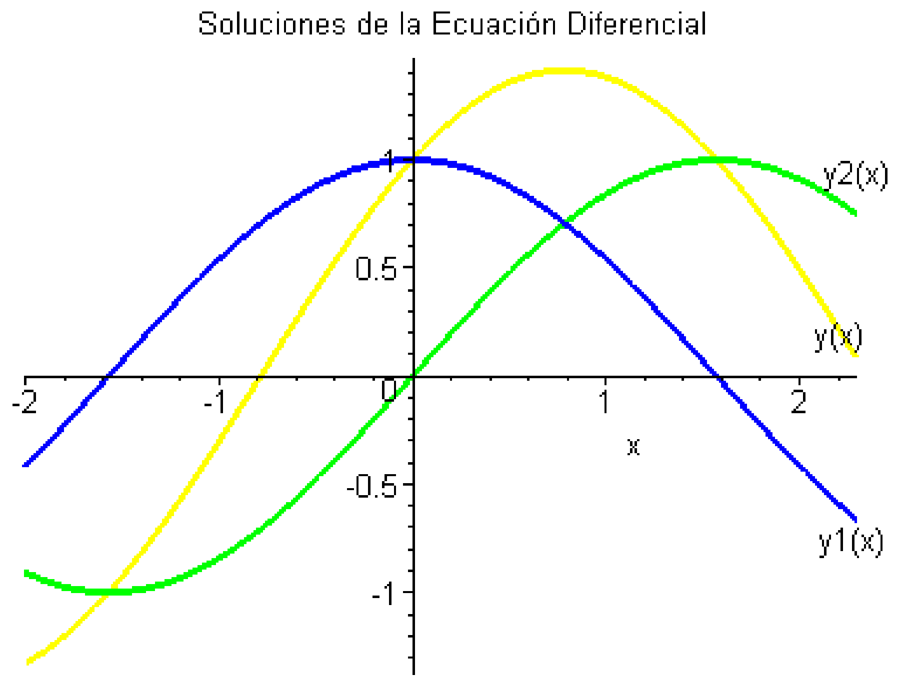
- suponemos que existe una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$
- calculamos y' e y'' teniendo en cuenta que las series de potencias se derivan término a término,
- reemplazamos las expresiones obtenidas en la ecuación diferencial,
- operamos con las sumatorias para obtener la expresión de la fórmula de recurrencia,
- resolvemos la relación de recursión haciendo n=0, 1, 2, 3,… de manera sucesiva,
- planteamos la expresión de la solución.

MÉTODO DE LAS SERIES DE POTENCIAS

Se obtuvo la solución

$$y = c_0 \,.\underbrace{\cos(x)}_{y_1(x)} + c_1 \,.\underbrace{sen(x)}_{y_2(x)}$$

Graficando:



Ver otro método de resolución

Ecuaciones diferencial no lineales

Métodos de análisis geométrico

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

ECUACIONES DIFERENCIALES

A menudo es difícil, si no imposible, resolver explícitamente una ED, en especial si no es lineal

ANÁLISIS DE TIPO GEOMÉTRICO

Permite obtener información cualitativa relativa a las soluciones de una ecuación diferencial sin necesidad de obtener una solución explícita.

Los gráficos pueden ser más útiles que las fórmulas analíticas para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales

Interpretar la ecuación como un
CAMPO VECTORIAL

CAMPO DE DIRECCIONES

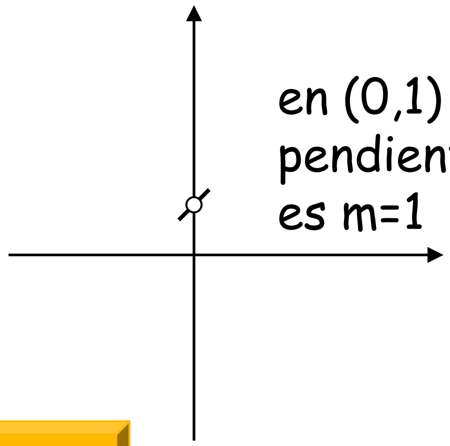
Algunas ecuaciones diferenciales no poseen soluciones o bien poseen pero no se pueden obtener en forma analítica

Estudiar el CAMPO DE DIRECCIONES permite obtener información acerca de la solución, sin resolverla

Ejemplo:

$$\underbrace{y' = x + y} \qquad y(0) = 1$$

La pendiente en un punto es igual a la suma de las coordenadas del punto



en (0,1) la pendiente es m=1

En MAPLE

ANÁLISIS CUALITATIVO

Sea $y' = sen(y)$ ECUACIÓN AUTÓNOMA

es posible resolverla con ciertas dificultades por separación de variables obteniendo la solución

$$x = \ln\left|\frac{ctg(y_0) + \cos ec(y_0)}{ctg(y) + \cos ec(y)}\right|$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$

Este resultado es exacto pero incómodo para interpretar cuestiones como:

- Suponiendo $y_0 = \pi/4$ ¿cómo se comporta la solución $y(x)$ para $x > 0$?
- y ¿qué pasa para $x \to \infty$?
- ¿y para una condición inicial arbitraria?

En contraste, el ANÁLISIS GRÁFICO de la ecuación diferencial $y' = sen(y)$ es claro y simple.

Suponemos un fluido que fluye continuamente y una partícula imaginaria en una posición inicial y_0 y a través de analizar su

RETRATO DE FASE: campo vectorial en la recta (unidimensional) inferir hacia **donde la lleva el flujo**

Para ello debemos graficar $f(y) = sen(y)$ en un sistema en el que consideramos:

- y: función incógnita: posición de una partícula imaginaria que se esta moviendo a lo largo del eje de las abscisas.
- y': derivada primera: velocidad de la partícula, representada sobre el eje de las ordenadas

RETRATO DE FASE

Este movimiento del fluido está definido por PUNTOS FIJOS

y^* donde $f(y^*) = 0$

-Puntos fijos estables (en las cercanías el flujo va hacia ellos)
-Puntos fijos inestables (el flujo se aleja de ellos en las cercanías)

$$\underbrace{\hspace{10cm}}$$

SOLUCIONES CONSTANTES DE EQUILIBRIO

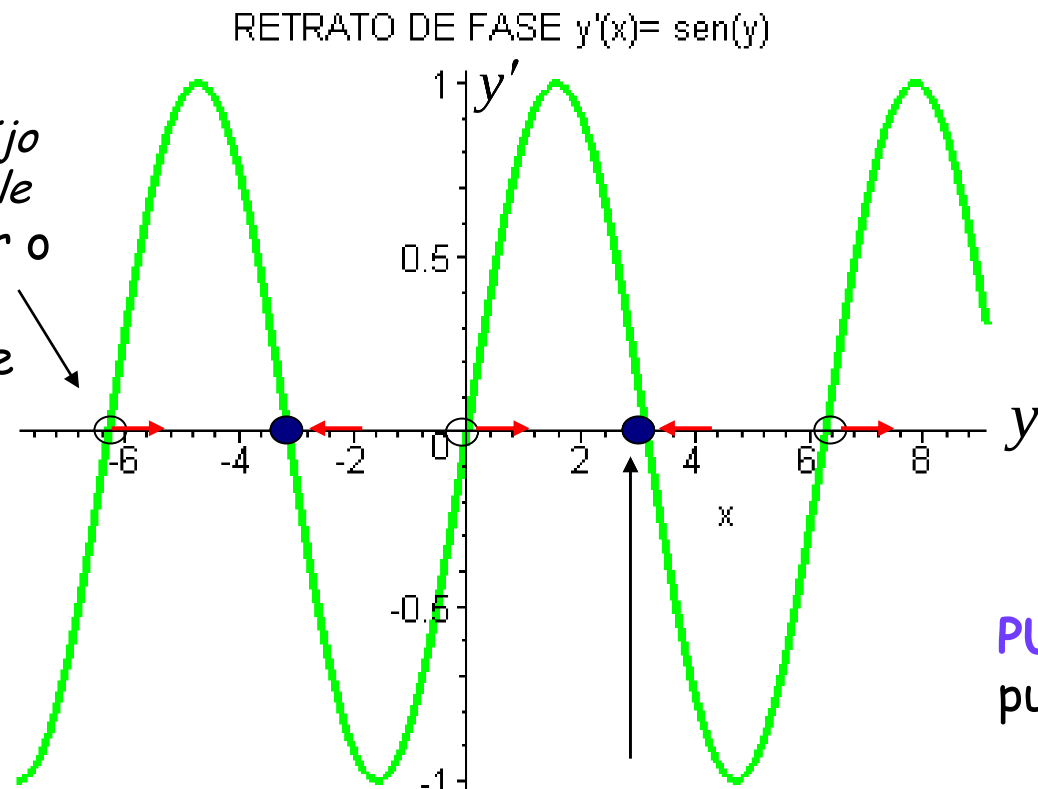
Una solución de equilibrio es constante para todo valor de la variable independiente.

En nuestro ejemplo: $y' = sen(y)$ la posición $y_0 = \pi$ es un PUNTO CRÍTICO entonces $y(x) = \pi$ es una SOLUCIÓN DE EQUILIBRIO.

RETRATO DE FASE

Para cada y (posición) nos da y′ (vector velocidad)

Punto fijo inestable
repulsor o punto fuente



Punto fijo estable

atractor o sumidero

$y' > 0$

$y' < 0$

PUNTOS FIJOS: en los puntos donde $y' = 0$

(no hay flujo)

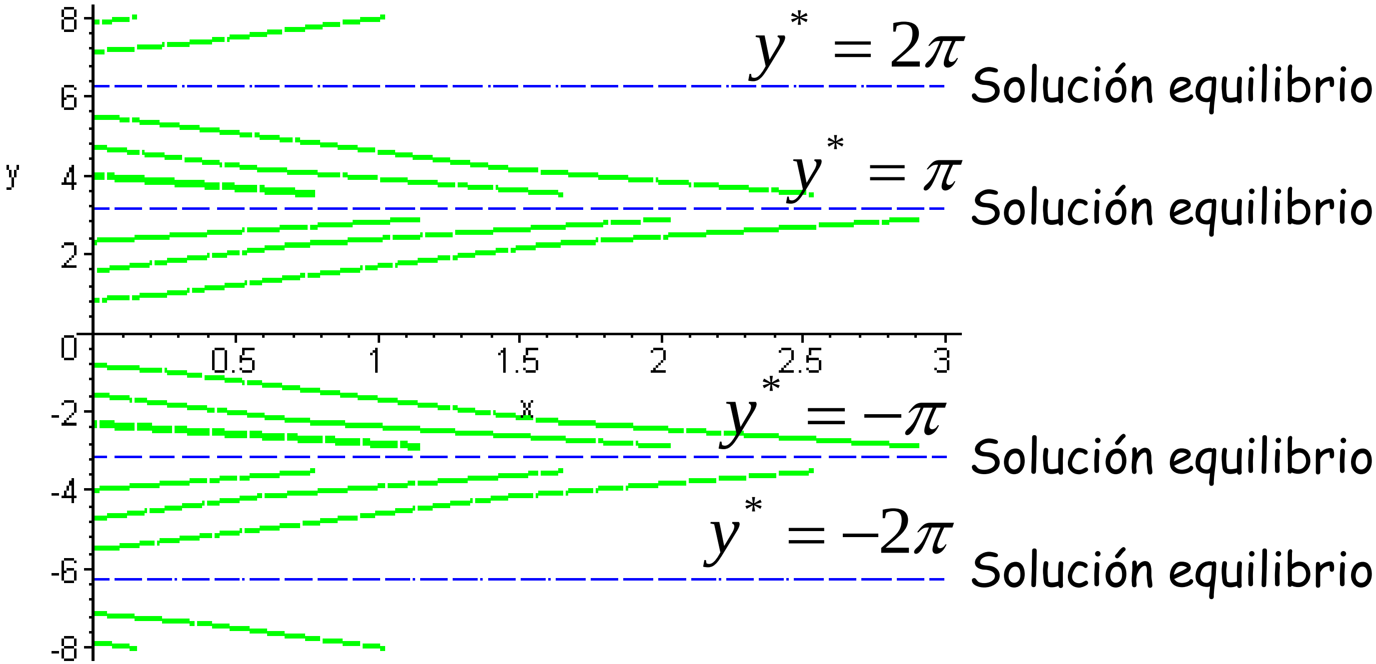
ANÁLISIS CUALITATIVO

El retrato de fase nos permite trazar las distintas trayectorias de las soluciones que están controladas por los puntos fijos.

1. Si la partícula parte de $y_0 = \pi/4$ se moverá cada vez más rápido hacia la derecha hasta alcanzar $y_0 = \pi/2$ (donde alcanza el máximo).

2. Luego la partícula comienza a reducir su velocidad, y termina aproximándose al punto fijo estable $y_0 = \pi$

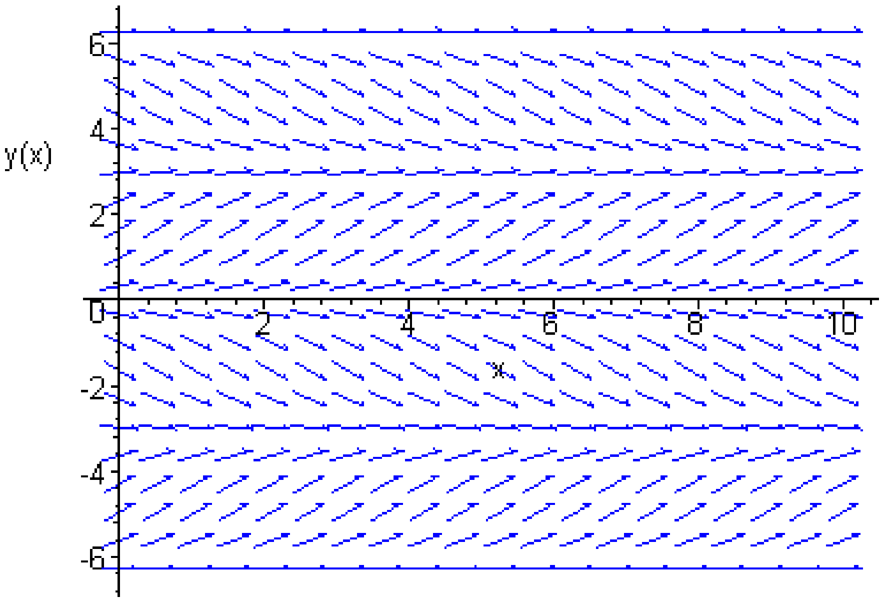
CURVAS SOLUCIÓN



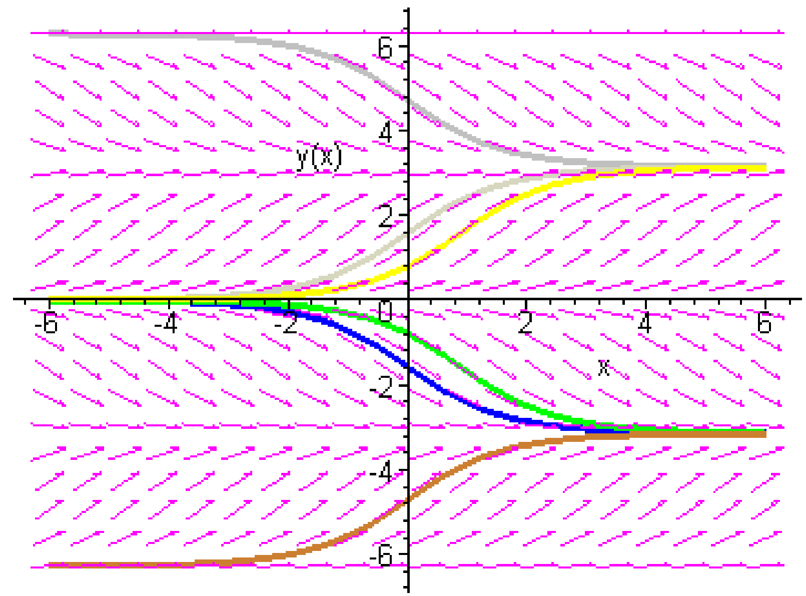
Cada una de las curvas solución son, primero CÓNCAVA hacia arriba $f''(x) > 0$ (la velocidad aumenta, se produce una aceleración) y luego CÓNCAVA hacia abajo $f''(x) < 0$ (la velocidad disminuye, se produce una desaceleración).

CON MAPLE

Campo de direcciones



Algunas curvas solución



En MAPLE

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Facultad Regional San Nicolás

ECUACIÓN DIFERENCIAL LOGÍSTICA

MODELO PARA EL CRECIMIENTO DE POBLACIONES

(más elaborado que el crecimiento exponencial)

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{K})$$

Con esta ecuación se puede analizar la relación entre la población P en un determinado momento t y la capacidad de contención K (población máxima que el medio es capaz de sostener a la larga).

ECUACIÓN DIFERENCIAL LOGÍSTICA

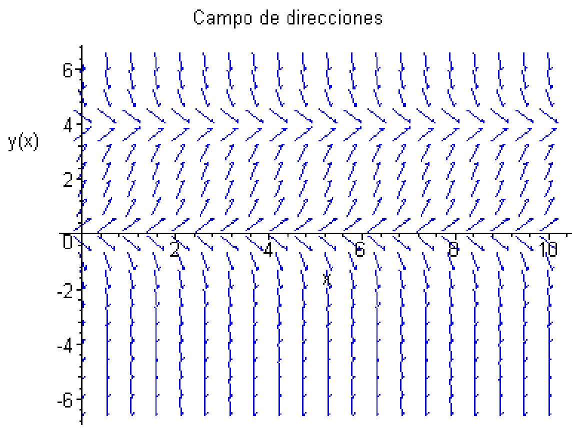
Partiendo de:

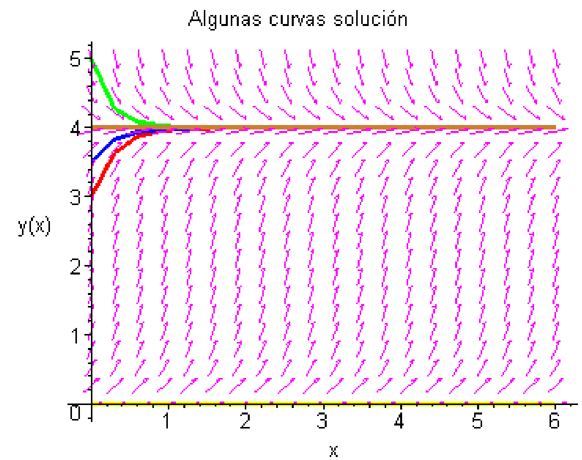
$$\frac{dP}{dt} = k\,.\,P \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)\,P$$

suponiendo k= β - δ diferencia entre los índices de natalidad y mortalidad

Si $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$ obtenemos: $\dfrac{dP}{dt} = aP - b\,P^2 \quad con \quad a = \beta_0 - \delta_0 \quad y \quad b = \beta_1$

$\delta = \delta_0$





BIFURCACIONES

Se presentan cuando cambia un parámetro en una ecuación diferencial

que generan INESTABILIDADES (cambios cualitativos)

Los puntos fijos pueden ser CREADOS, DESTRUÍDOS o cambiar la ESTABILIDAD.

El valor del parámetro en los que ocurre una bifurcación se denomina PUNTO DE BIFURCACIÓN para la ecuación diferencial.

BIFURCACIONES de puntos fijos para flujos en la recta

Bifurcación silla-nodo

$$x' = r + x^2$$

Los puntos fijos se crean y destruyen al variar un parámetro

Bifurcación horquilla

$$x' = rx - x^3$$

$$x' = rx + x^3$$

Existen puntos fijos que no pueden ser destruidos para ningún valor del parámetro (si cambian de estabilidad)

Transformada de Laplace

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(S)$$

Transformada integral

transforma $f(t)$ en una función de la variable S, cuando el intervalo de integración es $[0, \infty[$ no acotado.

Es posible convertir una ecuación diferencial donde la incógnita es $f(t)$ en una ecuación algebraica donde la incógnita sea $F(S)$.

Si $f(t)$ es una función definida para $t \geq 0$ entonces la integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

se llama **TRANSFORMADA DE LAPLACE** de $f(t)$ (siempre y cuando la integral sea convergente)

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Propiedades:

- Linealidad:

Se dice que $\mathscr{L}$ es una **transformada lineal** si

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\mathscr{L}\{f(t)\}+\beta\mathscr{L}\{g(t)\}$$

siempre y cuando existan a la vez las transformadas de f y g.

- Existencia: (condiciones suficientes)

f **continua por partes** en $[a,b]$ y **de orden exponencial c** para $t \to \infty$

$$\Rightarrow \exists F(S)=\mathscr{L}\{f(t)\} \qquad \forall S>c$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

<u>Ejemplos:</u>

1) $\mathscr{L}\{1\} =$

2) $\mathscr{L}\{e^{at}\} =$

3) $\mathscr{L}\{\cosh(t)\} =$

Consultar **TABLA de TRANSFORMADAS**

de algunas funciones básicas

En MAPLE

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$F(S)=\mathscr{L}\{f(t)\} \Rightarrow f(t) \text{ se llama}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

de $F(S)$ y se indica:

$$f(t)= \mathscr{L}^{-1}\{F(S)\}$$

<u>Ejemplos:</u>

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S+k}\right\}=e^{-kt}$$

Consultar **TABLA de TRANSFORMADAS INVERSAS**

- ❑ Proponer un ejercicio

En MAPLE

TRANSFORMADA DE DERIVADAS

Sirve para ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES con condiciones iniciales

Siendo $f(t)$ continua por partes y de orden exponencial para $t \to \infty$

TRANSFORMADA DE LA DERIVADA PRIMERA

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = S\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = S.F(S) - f(0)$$

TRANSFORMADA DE LA DERIVADA ENÉSIMA

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = S^n\,\mathcal{L}\{f(t)\} - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0) =$$
$$= S^n.F(S) - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$

TRANSFORMADA DE DERIVADAS

Resolver utilizando Transformada de Laplace

1) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{2t} \qquad con \quad y(0) = 1$

2) $\begin{cases} x'' - x' - 6x = 0 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$

Analizar si es posible resolver
estas ecuaciones diferenciales por
alguno de los métodos de
resolución vistos anteriormente.

3) $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^2\, e^{3y} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$

En MAPLE

Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Métodos numéricos

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

MODELO: Sistema depredador –presa: toma en cuenta la interacción de dos especies en el mismo hábitat:

- **Situación 1:** a) Sin depredadores $\dfrac{dP}{dt} = k\,P \quad (k > 0)$

  CRECIMIENTO EXPONENCIAL NATURAL

  b) Sin presas $\dfrac{dD}{dt} = -r\,D \quad (r > 0)$

  DECAIMIENTO EXPONENCIAL NATURAL

- **Situación 2:** Cuando las dos especies están presentes

ECUACIONES DE LOTKA VOLTERRA

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = k\,P - a\,P\,D \\[2ex] \dfrac{dD}{dt} = -r\,D + b\,P\,D \end{cases}$$

ECUACIONES DE LOTKA VOLTERRA

Análisis cualitativo

✓ Es difícil o imposible hallar soluciones explícitas para P y D

✓ Se opta por un análisis cualitativo

- Soluciones constantes llamadas **SOLUCIONES DE EQUILIBRIO**

- Un **RETRATO DE FASE**

  (puntos de equilibrio más trayectorias de fase) en el

  PLANO DE FASE (dos variables)

En MAPLE

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE ELIMINACIÓN:

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes que se transforma en una ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases}$$

MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE:

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes que se transforma en un sistema algebraico

$$\begin{cases} 2x' + y' - y = t \\ x' + y' = t^2 \end{cases}$$

En MAPLE

Series de Fourier

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Facultad Regional San Nicolás

SERIE DE FOURIER

En los sistemas mecánicos y eléctricos muchas veces aparecen FUNCIONES FORZANTES PERIÓDICAS que no son simplemente combinación lineal de senos y cosenos pero que pueden ser representadas en

SERIES DE TÉRMINOS TRIGONOMÉTRICOS.

FUNCIÓN PERIÓDICA

$$f(t) \quad \forall t$$

se dice que es periódica (de período p) si:

$$\exists\, p \in \Re^{+} \,/\, f(t+p) = f(t) \quad \forall t$$

FOURIER en su "Teoría analítica del calor" mostró que:

"toda función periódica de período 2π puede representarse mediante una SERIE TRIGONOMÉTICA"

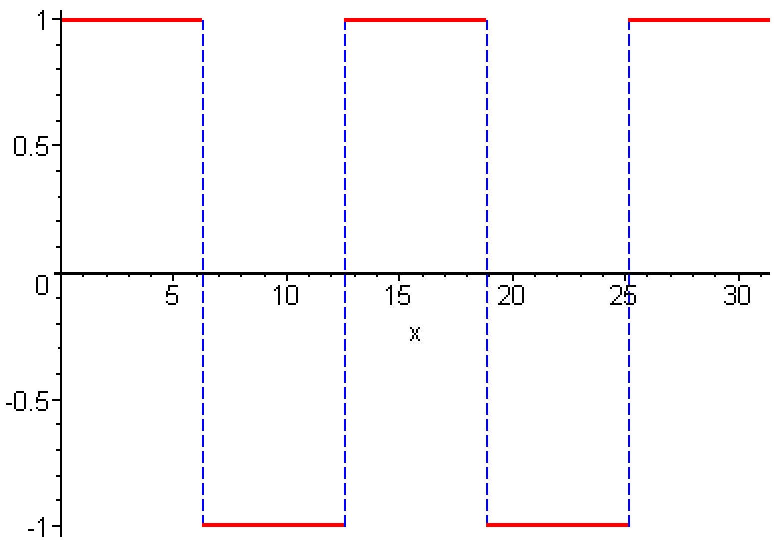
SERIE DE FOURIER

Ejemplo:

FUNCIÓN ONDA CUADRADA

$$f(t) = (-1)^{[2\pi x]}$$

función periódica
continua por partes
de período 2π



Es posible representar la función onda cuadrada por medio de una
SERIE DE FOURIER

es una de las técnicas más ampliamente usadas en la Matemáticas Aplicadas

SERIE DE FOURIER

DEFINICIÓN:

Sea $f(t)$ una función continua por partes de período 2L definida $\forall t$. Entonces la SERIE DE FOURIER de $f(t)$ es:

$$\boxed{f(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n\, sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]}$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\, sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \end{cases}$$

con n=0 el a_n se transforma en a_0: $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$

SERIE DE FOURIER

CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER:

Suponiendo que $f(t)$ es **suave por partes**. Entonces su SERIE DE FOURIER converge:

- ✓ a $f(t)$ $\forall t$ donde la función es continua.
- ✓ al promedio de los límites laterales donde es discontinua. $\frac{1}{2}\left[f(t^+)+f(t^-)\right]$

SERIE DE FOURIER PARA FUNCIONES PARES E IMPARES:

- ❑ f es PAR: $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$
- ❑ f es IMPAR: $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

Los coeficientes de Fourier se modifican cuando f es par o impar

SERIE DE FOURIER

Veamos ahora un ejemplo de función periódica:

Un sonido puro se puede expresar mediante ***y = A sen(Bx-C)***

Considerando los siguientes sonidos puros:

$$y1 = \operatorname{sen} x \quad ; \quad y2 = 1/3 \operatorname{sen}(3x) \quad ; \quad y3 = 1/5 \operatorname{sen}(5x) \quad ; \quad y4 = 1/7 \operatorname{sen}(7x) \quad .$$

- Representar gráficamente en coordenadas cartesianas:

a) y1 (es el primer armónico)
b) y1+y2 (segundo armónico)
c) y1+y2+y3 (tercer armónico)
d) y1+y2+y3+y4 (cuarto armónico)

- Analizar qué forma va tomando la gráfica a medida que se agregan más términos . ¿Es periódica?.

En MAPLE

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Facultad Regional San Nicolás

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

Una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) es una ecuación que relaciona una función de varias variables y sus derivadas parciales respecto de esas variables

La forma general de una **ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden** con dos variables independientes, x e y, es:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

en la que A, B, C,….,G son funciones de x e y.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

Cuando en la forma general G(x, y)=0, la ecuación se llama **homogénea**; en cualquier otro caso es **no homogénea.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

Una **SOLUCIÓN** de una ecuación en derivadas parciales con dos variables independientes x e y es una función $u(x, y)$ que posee todas las derivadas parciales que indica la ecuación y que la satisface en alguna región del plano xy.

No es fácil determinar las soluciones generales. En cambio es posible obtener **SOLUCIONES PARTICULARES** de las ecuaciones lineales importantes que se originan en muchas aplicaciones.

Método de SEPARACIÓN DE VARIABLES para encontrar soluciones particulares

Cuando se busca una solución particular en forma de un producto de una función de x por una función de y, como

$$u(x,y) = X(x).Y(y)$$

a veces es posible convertir una ecuación en derivadas parciales, lineal de dos variables en dos ecuaciones diferenciales *ordinarias*. Para hacerlo notemos que:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = X'Y, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = X\,Y' \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X\,Y'' \end{array}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

<u>Ejemplo 1:</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}$$

Cada lado de la ecuación es igual a una **constante de separación** real que se acostumbra escribirla como λ^2 ó $-\lambda^2$

CASO I: $\lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad u = A_1 e^{\lambda^2 y}\cosh 2\lambda x + B_1 e^{\lambda^2 y} senh\, 2\lambda x$

CASO II: $-\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u = A_2\, e^{\lambda^2 y}\cos 2\lambda x + B_2\, e^{\lambda^2 y} sen\, 2\lambda x$

CASO III: $\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = A_3 x + B_3$

La separación de variables no es un método general para hallar soluciones particulares

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

Si $u_1, u_2, \ldots., u_k$ son soluciones de una EDP homogénea de 2do orden con coeficientes constantes, la combinación lineal:

$$u = c_1 . u_1 + c_2 . u_2 + \ldots + c_k . u_k$$

en que las $c_i, i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes, también es solución.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES:

La ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, es:

- ✓ **hiperbólica** si $B^2 - 4AC > 0$
- ✓ **parabólica** si $B^2 - 4AC = 0$
- ✓ **elíptica** si $B^2 - 4AC < 0$

ECUACIONES CLÁSICAS
y problemas de valor en la frontera

- ECUACIÓN EN UNA DIMENSIÓN DEL CALOR

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad k > 0$$

- ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- ECUACIÓN DE LAPLACE EN DOS DIMENSIONES

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En MAPLE